Examen VWO

2014

tijdvak 1
dinsdag 20 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 77 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

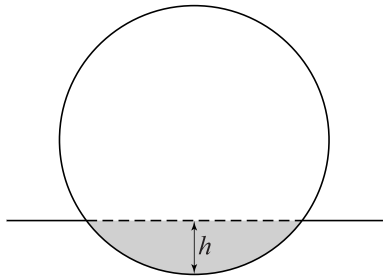
$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$
$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$
$$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$
$$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$$
$$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

Bal in de sloot

Een bal met een straal van 11 cm komt in een sloot terecht en blijft drijven. Het laagste punt van de bal bevindt zich h cm onder het wateroppervlak.
In figuur 1 zie je een doorsnede van de situatie. Het deel van de bal onder het wateroppervlak is daarin grijs gemaakt.

figuur 1

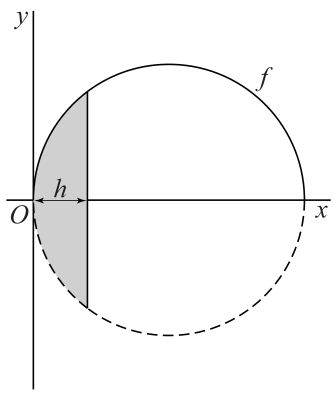


Om het rekenwerk te vereenvoudigen, draaien we de figuur een kwartslag. Vervolgens kiezen we een assenstelsel zodanig dat de halve cirkel boven de x-as de grafiek is van de functie f met:

$$f(x) = \sqrt{22x - x^2}$$

Hierbij zijn x en $f(x)$ in centimeters. Zie figuur 2.

figuur 2



Het deel van de bal onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de grafiek van f om de x-as.

Voor de inhoud I in cm^3 van het deel van de bal onder het wateroppervlak geldt:

$$I = \pi h^2 (11 - \tfrac{1}{3}h)$$

4p **1** Bewijs dat deze formule juist is.

De massa van de bal is 425 gram. Uit de natuurkunde is bekend dat de massa van een drijvende bal even groot is als de massa van het door de bal weggedrukte water. Neem aan dat 1 cm^3 water een massa van 1 gram heeft.

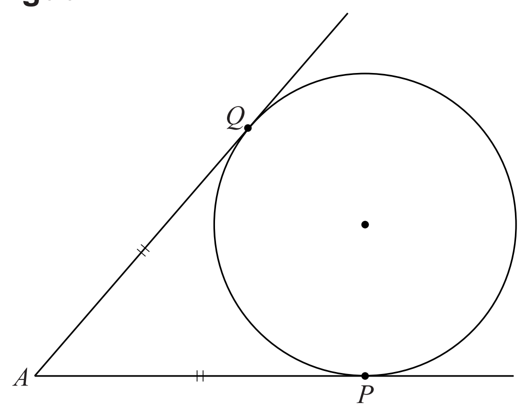
3p **2** Bereken hoe diep de drijvende bal in het water ligt. Rond je antwoord af op een geheel aantal millimeters.

Cirkels in een driehoek

Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In figuur 1 geldt dus $AP = AQ$.

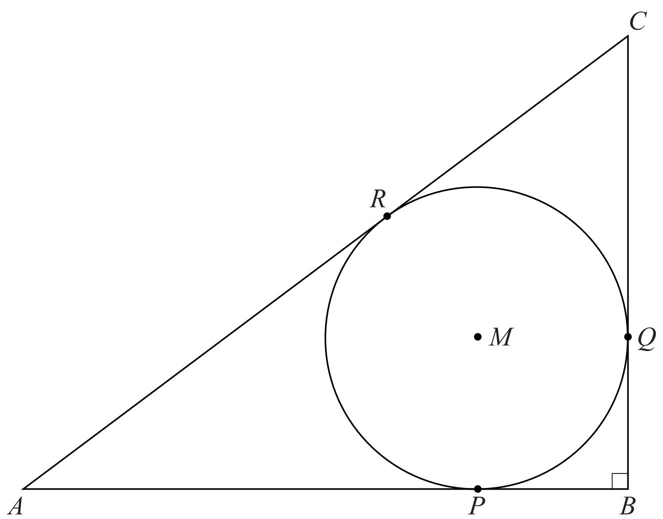
Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.

figuur 1



Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R. M is het middelpunt van deze cirkel.
Zie figuur 2.

figuur 2

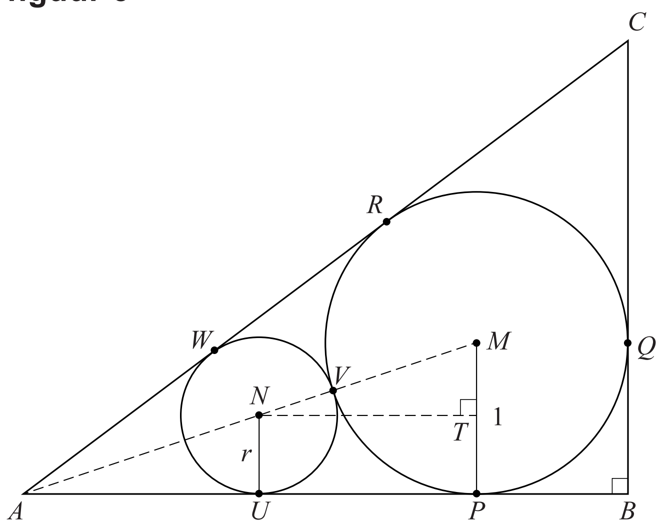


De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

4p **3** Bewijs dit.

Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T. Zie figuur 3.

figuur 3



Er geldt: $AU = 3r$.

3p **4** Bewijs dit.

5p **5** Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Gebroken goniometrische functie

Voor elke waarde van a, met $a \neq 0$, is de functie f_a gegeven door:

$$f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{1 - 2\cos(ax)}$$

4p **6** Bereken exact voor welke waarden van a de lijn met vergelijking $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

5p **7** Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

Boven en onder de lijn door de buigpunten

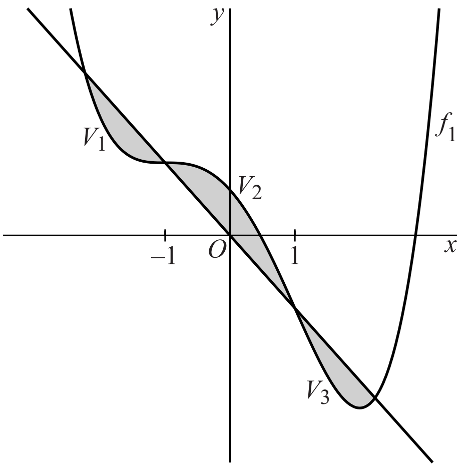
Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt: $f_p''(x) = 12(x-p)(x+p)$

Er geldt: $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ met a en b constanten.

4p **8** Toon dit aan met primitiveren.

Voor $a = -8$ en $b = 5$ wordt f_1 gegeven door $f_1(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$.
In de figuur zie je de grafiek van f_1. Deze grafiek heeft buigpunten voor $x = -1$ en $x = 1$. De lijn door deze buigpunten heeft vergelijking $y = -8x$.
Deze lijn en de grafiek van f_1 begrenzen drie vlakdelen V_1, V_2 en V_3 die om en om onder en boven de lijn liggen.

figuur



De lijn met vergelijking $y = -8x$ snijdt de grafiek van f_1 niet alleen in de twee buigpunten, maar ook in twee andere punten.

4p **9** Bereken exact de x-coördinaten van de twee andere snijpunten.

De vlakdelen V_1 en V_3 hebben gelijke oppervlakte, namelijk $3\frac{1}{5}$.

4p **10** Bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 gelijk is aan de oppervlakte van V_2.

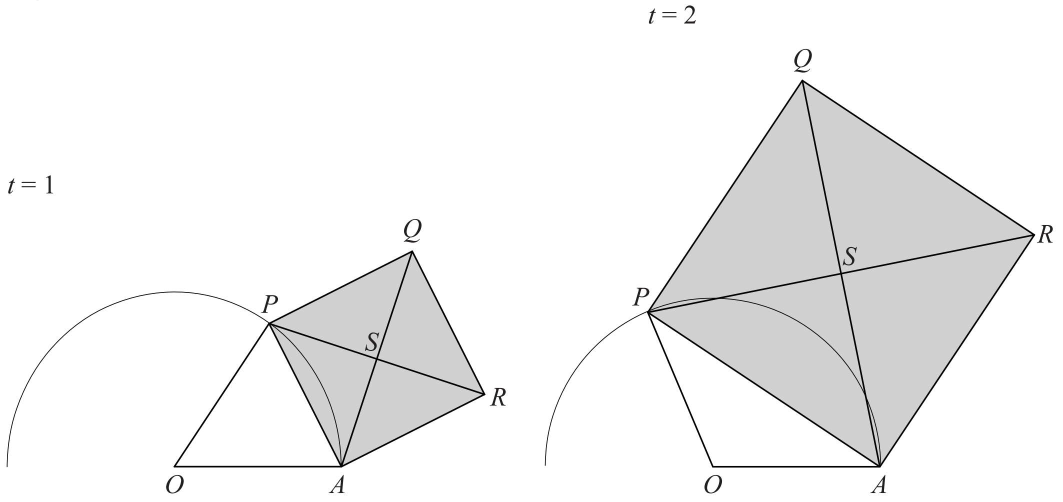
Vierkant op een driehoek

Gegeven zijn de punten $O(0,0)$ en $A(2,0)$.
Punt P beweegt over de halve cirkel met middelpunt O en straal 2 volgens de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases} \quad \text{met } 0 < t < \pi$$

Tegen de zijde AP van driehoek OAP ligt een vierkant $ARQP$. Dit vierkant ligt buiten driehoek OAP. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van vierkant $ARQP$. In figuur 1 is de situatie op de tijdstippen $t=1$ en $t=2$ weergegeven.

figuur 1



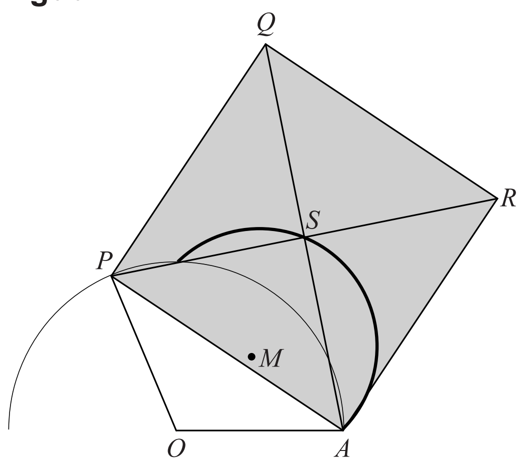
Er geldt: $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1+\cos t+\sin t \\ 1-\cos t+\sin t \end{pmatrix}$

4p **11** Bewijs dit.

In figuur 2 is een deel getekend van de baan waarover S beweegt tijdens de beweging van punt P.
Figuur 2 doet vermoeden dat de baan van S een cirkel is met middelpunt $M(1,1)$.

4p **12** Bewijs dat de afstand van S tot het punt $M(1,1)$ constant is.

figuur 2

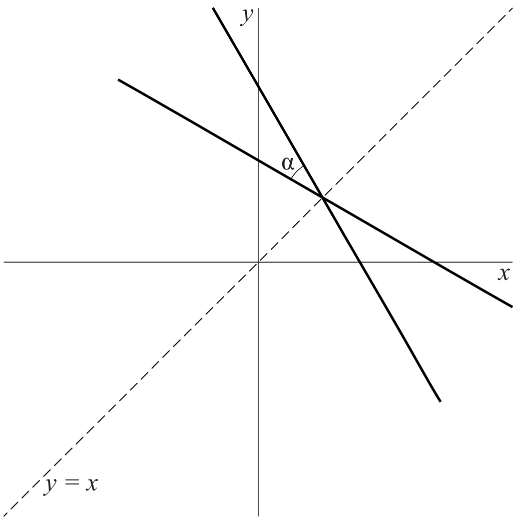


Gespiegelde raaklijnen

Een lijn met vergelijking $ax + y = b$, met $a > 0$, wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$.
In figuur 1 zijn voor zekere waarden van a en b de lijn en zijn spiegelbeeld getekend.
De hoek tussen de twee lijnen is α.
Er geldt:

$$\cos\alpha = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

figuur 1

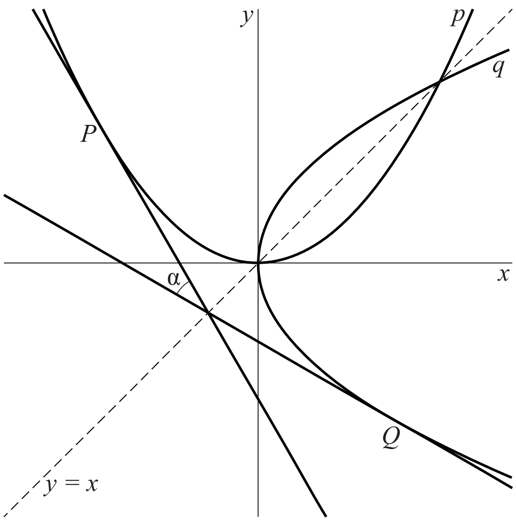


4p **13** Bewijs dit.

Gegeven zijn de parabool p met vergelijking $x^2 = \frac{1}{2}y$ en de parabool q met vergelijking $y^2 = \frac{1}{2}x$.
p en q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn met vergelijking $y = x$.

Op p ligt een punt P met een negatieve x-coördinaat.
De raaklijn in P aan p wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$.
Dit spiegelbeeld raakt q in het punt Q.
De hoek tussen de twee raaklijnen is α.
In figuur 2 is een mogelijke situatie getekend.

figuur 2



Er zijn twee gevallen waarin de hoek tussen de twee raaklijnen gelijk is aan 30°.

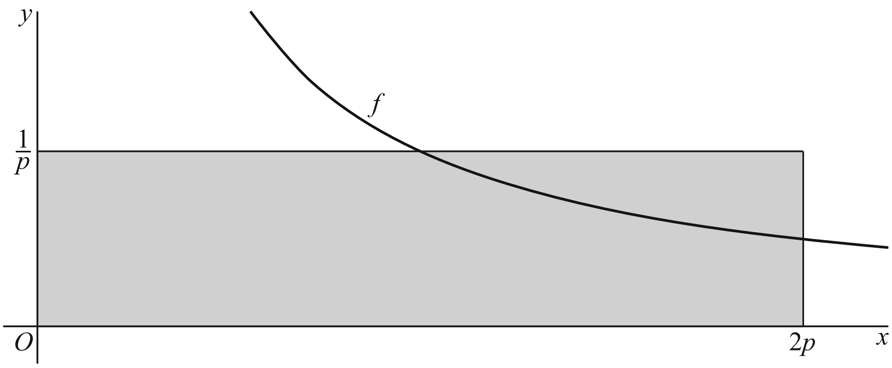
6p **14** Bereken exact de x-coördinaat van P in elk van deze gevallen.

Grafiek verdeelt rechthoek

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

In onderstaande figuur is voor $p > 0$ een rechthoek getekend die wordt begrensd door de lijnen met vergelijkingen $x = 2p$ en $y = \dfrac{1}{p}$, de x-as en de y-as.

figuur



Voor elke positieve waarde van p verdeelt de grafiek van f de rechthoek in twee stukken.

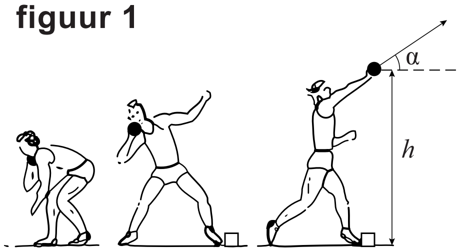
7p **15** Bewijs met behulp van integreren dat de oppervlakte van elk van deze stukken onafhankelijk is van de waarde van p.

De ideale stoothoek

Een kogelstoter stoot een kogel weg onder een hoek α (in radialen, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$).

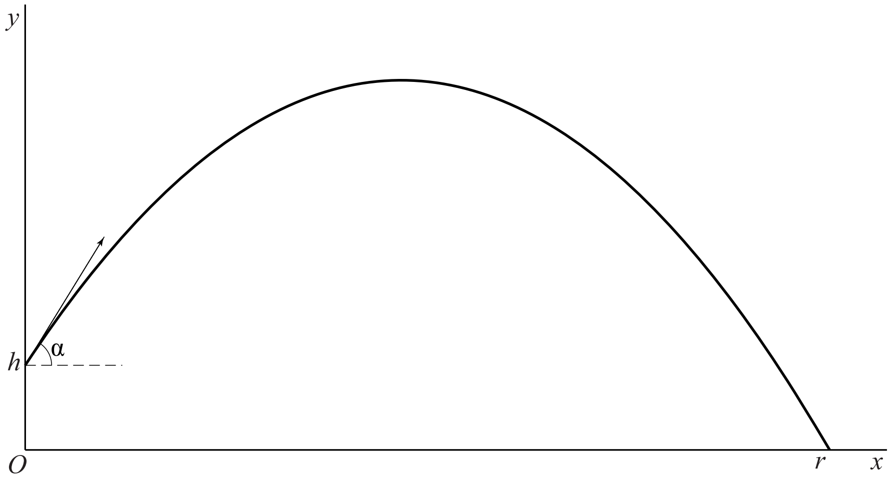
De hoogte in meters waarop de kogelstoter de kogel loslaat is h.
Zie figuur 1.

figuur 1



Bij deze situatie kiezen we een assenstelsel waarbij de plaats waar de kogel wordt losgelaten zich op hoogte h op de verticale as bevindt. De kogel komt op afstand r in meters van de oorsprong op de grond. Zie figuur 2.
In deze opgave gaan we ervan uit dat de kogelstoter de kogel altijd met dezelfde snelheid wegstoot.

figuur 2



Als α zo is dat $\cos\alpha = 0{,}6$ en we de afmetingen van de kogel en de wrijving met de lucht verwaarlozen, dan gelden (bij benadering) de volgende formules voor de coördinaten van de kogel tijdens de vlucht:

$$\begin{cases} x(t) = 8{,}4t \\ y(t) = h + 11{,}2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment van loslaten, x de horizontale afstand in meters en y de hoogte in meters.

3p **16** Bereken de snelheid van de kogel op tijdstip $t = 0$.

De horizontale afstand r die de kogel overbrugt, hangt af van de hoek α waaronder deze wordt weggestoten.
In het algemeen geldt voor elke waarde van α de volgende formule voor r:

$$r = 20\cos\alpha\left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 0{,}1h}\right)$$

De ideale stoothoek is de hoek α waarbij r zo groot mogelijk is.

We bekijken nu de situatie waarbij de kogelstoter de kogel loslaat op een hoogte van 1,85 m.

3p **17** Bereken voor deze situatie de ideale stoothoek.

Tot slot bekijken we de denkbeeldige situatie waarin $h = 0$.

6p **18** Bereken exact de ideale stoothoek voor deze denkbeeldige situatie.